

Энгельсский технологический институт (филиал) федерального государственного  
бюджетного образовательного учреждения  
высшего образования  
«Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.»

# **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

Методические указания к лабораторной работе по дисциплине  
« Основы технологии машиностроения»  
для студентов направлений

15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств»  
15.03.02 «Технологические машины и оборудование»

**Энгельс 2025**

**Цель работы:** изучить метод математического планирования эксперимента для получения линейной модели сложных технологических процессов.

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

### *Выбор факторов*

На технологические процессы влияет много различных факторов. Исследование каждого фактора в отдельности при условии, что все основные факторы стабилизируются, требует выполнения большого объема экспериментальной работы. Исследование влияет на процесс сразу нескольких факторов, и получение математической модели процесса с учетом их взаимовлияния позволяет существенно снизить трудоемкость эксперимента.

Исследуемые факторы должны соответствовать следующим требованиям:

- факторы должны быть управляемыми, т.е. позволяющими устанавливать требуемое значение фактора и поддерживать это значение в течение опыта;
- для любой пары факторов должно выполняться условие их совместности, при котором возможное взаимное влияние факторов не должно вызывать нарушения технологического процесса или качества обработки;
- факторы должны быть независимыми и однозначными;
- факторы должны непосредственно воздействовать на исследуемый параметр;
- факторами технологического процесса могут быть параметры пространства и времени;
- механические, электрические, магнитные, тепловые, акустические параметры, а также параметры качества.

### *Двухуровневый полный факторный эксперимент (ПФЭ)*

Полный факторный эксперимент проводится в том случае, когда он непродолжителен или требует небольших затрат. В этом случае в эксперимент включают факторы  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$  (всего  $k$  факторов), для каждого из которых устанавливается только 2 уровня: верхний и нижний. Например, фактор  $x_1$  - скорость продольной подачи стола плоскошлифовального станка – изменяется в пределах от 0,3 до 2 м/мин. У фактора  $x_1$  нижний уровень – 0,3 м/мин; верхний – 2 м/мин, всего два уровня.

Поскольку факторы процесса разнородны и имеют различные единицы измерения, они приводятся к единой системе счисления путем перехода от действительных значений факторов к закодированным по формулам:

$$Z_i = (lgX_i - lgX_{icp}) / (lgX_{icp} - lgX_{imin}),$$

$$lgX_{icp} = (lgX_{max} + lgX_{min}) / 2.$$

После преобразований по указанным формулам верхний уровень имеет кодированное обозначение +1, нижний уровень –1. Для упрощения процедуры построения планов экспериментов цифры (единицы) опускаются и пишутся только их знаки: + или –.

Затем строится план матрицы планирования эксперимента. Построение матрицы сводится к стандартной форме записи условий проведения эксперимента в виде таблицы, в строчках которой записываются данные опытов, а в столбцах – факторы (в закодированном виде + или –) с реализацией всех возможных комбинаций факторов. При этом в первом столбце таблицы следует менять знаки поочередно, во втором столбце чередовать их через 2, в третьем – через 4, в четвертом – через 8 и т.д. по степеням двойки. Количество всех сочетаний комбинаций уровней факторов определяется по формуле:

$$N = 2^k,$$

где  $N$  – общее число различных точек в плане; 2 – число уровней;  $k$  – общее число факторов.

Например, если имеется два фактора  $Z_1$  и  $Z_2$ , тогда, придавая каждому фактору два значения (верхний (+) и нижний (-)) получим все возможные сочетания уровней неполного плана матрицы планирования  $2^2$  (табл.1).

Таблица 1

Неполный план матрицы планирования  $2^2$

| Номер точки<br>плана | Факторы |       |
|----------------------|---------|-------|
|                      | $Z_1$   | $Z_2$ |
| 1                    | -       | -     |
| 2                    | +       | -     |
| 3                    | -       | +     |
| 4                    | +       | +     |

Для составления плана матрицы для трех факторов ( $Z_1, Z_2, Z_3$ ) приведенную выше матрицу для  $2^2$  повторяют дважды: один раз при значениях  $x$ , находящихся на нижнем уровне, второй раз – при значениях  $x$ , находящихся на верхнем уровне (табл. 2).

Таблица 2

Неполный план матрицы планирования  $2^3$ 

| Номер точки<br>плана | Факторы |       |       |
|----------------------|---------|-------|-------|
|                      | $Z_1$   | $Z_2$ | $Z_3$ |
| 1                    | -       | -     | -     |
| 2                    | +       | -     | -     |
| 3                    | -       | +     | -     |
| 4                    | +       | +     | -     |
| 5                    | -       | -     | +     |
| 6                    | +       | -     | +     |
| 7                    | -       | +     | +     |
| 8                    | +       | +     | +     |

Если же будет рассмотрен 4-й фактор  $Z_4$ , то аналогичным образом будет повторено планирование для 3 переменных (табл. 2): один раз – для фактора  $Z_4$ , находящегося на нижнем уровне, второй раз – для  $Z_4$ , находящегося на верхнем уровне.

Аналогично получается план матрицы планирования для 5, 10 и т.д. факторов, то есть для любого числа факторов.

Неполный план матрицы планирования эксперимента даёт возможность рассчитать коэффициенты факторов процесса  $b_1 \rightarrow z_1$ ,  $b_2 \rightarrow z_2$ ,  $b_3 \rightarrow z_3$  ...  $b_n \rightarrow z_n$ , однако этих коэффициентов недостаточно, чтобы получить уравнение регрессии, в котором помимо линейных членов будут члены учитывающие эффект взаимного межфакторного взаимодействия.

Так, полный план ПФЭ<sup>2</sup> даёт возможность рассчитать 4 коэффициента уравнения регрессии:

$$y = b_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_{12} z_1 z_2.$$

План ПФЭ<sup>3</sup> позволяет рассчитать 8 коэффициентов уравнения регрессии.

$$y = b_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 + b_{12} z_1 z_2 + b_{13} z_1 z_3 + b_{23} z_2 z_3 + b_{123} z_1 z_2 z_3..$$

План ПФЭ<sup>4</sup> даёт возможность получить оценки 16 коэффициентов уравнения регрессии:

$$y = b_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2 + b_3 z_3 + b_4 z_4 + b_{12} z_1 z_2 + b_{13} z_1 z_3 + b_{14} z_1 z_4 + b_{23} z_2 z_3 + b_{24} z_2 z_4 + b_{34} z_3 z_4 + \\ + b_{123} z_1 z_2 z_3 + b_{124} z_1 z_2 z_4 + b_{134} z_1 z_3 z_4 + b_{1234} z_1 z_2 z_3 z_4..$$

План ПФЭ<sup>5</sup> имеет  $N=32$  и, следовательно, даёт возможность получить уравнение регрессии с 32 коэффициентами и т.д. Чтобы получить полный план матрицы планирования для неполного плана, в таблицу добавить 1 столбец с фиктивной переменной  $Z_0$  для оценки свободного члена  $b_0$  (значение  $Z_0$  всегда одинаково во всех строках и равно +1) и столбцы со всевозможными комбинациями произведений факторов, которые позволят оценить эффекты взаимодействия факторов.

Например, полный план ПФЭ<sup>3</sup> приведён в табл.3.

Таблица 3

Полный план матрицы планирования 2<sup>3</sup>

| Номер точки плана | Значения основных факторов |                |                |                | Комбинации произведений факторов |                               |                               |                                              |
|-------------------|----------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|----------------------------------------------|
|                   | Z <sub>0</sub>             | Z <sub>1</sub> | Z <sub>2</sub> | Z <sub>3</sub> | Z <sub>1</sub> Z <sub>2</sub>    | Z <sub>1</sub> Z <sub>3</sub> | Z <sub>2</sub> Z <sub>3</sub> | Z <sub>1</sub> Z <sub>2</sub> Z <sub>3</sub> |
| 1                 | +                          | -              | -              | -              | +                                | +                             | +                             | -                                            |
| 2                 | +                          | +              | -              | -              | -                                | -                             | +                             | +                                            |
| 3                 | +                          | -              | +              | -              | -                                | +                             | -                             | +                                            |
| 4                 | +                          | +              | +              | -              | +                                | -                             | -                             | -                                            |
| 5                 | +                          | -              | -              | +              | +                                | -                             | -                             | +                                            |
| 6                 | +                          | +              | -              | +              | -                                | +                             | -                             | -                                            |
| 7                 | +                          | -              | +              | +              | -                                | -                             | +                             | -                                            |
| 8                 | +                          | +              | +              | +              | +                                | +                             | +                             | +                                            |

### *Дробный факторный эксперимент (ДФЭ), равный 2<sup>к-р</sup>*

При достаточно большом числе факторов ( $k > 5$ ) трудоемкость полного факторного эксперимента ПФЭ<sup>к</sup> при  $k > 5$  является неэкономичным. В связи с этим появляется возможность расчетный столбец взаимодействия, эффект которого заранее считают незначимым, использовать для дополнительного фактора. Достроенные на такой основе планы будут называться планами дробного эксперимента ДФЭ<sup>к-р</sup>. Эти планы в своей основе имеют план полного факторного эксперимента для числа факторов меньше числа принятых к исследованию на 1, 2 и т.д. ( $p=1, 2$  и т.д.).

Таблица 4

План матрицы планирования 2<sup>7-4</sup>

| Номер точки плана | Значения факторов в кодовых обозначениях |                |                |                |                                               |                                               |                                               |                                                              |
|-------------------|------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
|                   | Z <sub>0</sub>                           | Z <sub>1</sub> | Z <sub>2</sub> | Z <sub>3</sub> | Z <sub>4</sub> =Z <sub>1</sub> Z <sub>2</sub> | Z <sub>5</sub> =Z <sub>1</sub> Z <sub>3</sub> | Z <sub>6</sub> =Z <sub>2</sub> Z <sub>3</sub> | Z <sub>7</sub> =Z <sub>1</sub> Z <sub>2</sub> Z <sub>3</sub> |
| 1                 | +                                        | -              | -              | -              | +                                             | +                                             | +                                             | -                                                            |
| 2                 | +                                        | +              | -              | -              | -                                             | -                                             | +                                             | +                                                            |
| 3                 | +                                        | -              | +              | -              | -                                             | +                                             | -                                             | +                                                            |
| 4                 | +                                        | +              | +              | -              | +                                             | -                                             | -                                             | -                                                            |
| 5                 | +                                        | -              | -              | +              | +                                             | -                                             | -                                             | +                                                            |
| 6                 | +                                        | +              | -              | +              | -                                             | +                                             | -                                             | -                                                            |
| 7                 | +                                        | -              | +              | +              | -                                             | -                                             | +                                             | -                                                            |
| 8                 | +                                        | +              | +              | +              | +                                             | +                                             | +                                             | +                                                            |

Например, если в ПФЭ<sup>3</sup> один из факторов взаимодействия Z<sub>1</sub>Z<sub>2</sub>, Z<sub>1</sub>Z<sub>3</sub>, Z<sub>2</sub>

$Z_3, Z_1Z_2Z_3$  заменить четвертым фактором  $Z_4$ , то получим половину  $2^{4-1}$  от ПФЭ $2^3$ . Если два эффекта взаимодействия заменить факторами  $Z_4$  и  $Z_5$ , то получим  $1/4 \cdot 2^{5-2}$  от ПФЭ $2^3$ . Можно аналогично получить  $1/8$  от ПФЭ $2^3$ , заменив три эффекта взаимодействия факторами  $Z^4, Z^5, Z^6$ . Если заменить 4 эффекта взаимодействия факторами  $Z^4, Z^5, Z^6$ , то получим  $1/16 \cdot 2^{7-4}$  от ПФЭ (табл. 4).

Пользуясь таким планированием и проведя эксперимент, можно вычислить коэффициенты факторов или параметры уравнения регрессии:

$$y = b_0 + b_1z_1 + b_2z_2 + b_3z_3 + b_4z_4 + b_5z_5 + b_6z_6 + b_7z_7.$$

### ***Проверка планов матриц планирования ПФЭ=2<sup>k</sup> и ДФЭ=2<sup>k-p</sup>***

После построения плана матрицы планирования необходимо ее проверить по следующим критериям:

а) симметричность относительно центра эксперимента – алгебраическая сумма элементов столбца каждого фактора должна быть равна нулю, кроме столбца, соответствующего свободному члену;

б) нормировка – сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу точек плана матрицы;

в) ортогональность – сумма построчных произведений плана матрицы двух любых столбцов равна нулю.

Если план матрицы планирования отвечает указанным свойствам, то математическая модель, полученная в результате эксперимента способна предсказать значение параметра с одинаковой точностью в любых направлениях на равных расстояниях от центра эксперимента или плана матрицы.

### ***Проведение эксперимента ПФЭ или ДФЭ***

Для записи сведений о факторах процесса записи верхних, нижних уровней факторов, интервалов варьирования и результатов эксперимента подготавливается журнал планирования эксперимента по форме, приведенной в приложении.

### ***Обработка результатов эксперимента***

Методами ДФЭ и ПФЭ можно получить описание изучаемого процесса в виде линейного уравнения:

$$y = b_0 + b_1z_1 + b_2z_2 + \dots + b_nz_n.$$

Для определения параметров модели процесса или коэффициентов регрессии  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$  необходимо использовать средние результаты опытов:

$$b_{iv} = \sum z_{iv} Y_{cp} / N,$$

где  $z_{iv}$  – номер столбца в плане матрицы (0, 1, 2...к);  $y_{cp}$  – среднее арифметическое по  $m$  опытам в точке с номером;  $N$  – общее число различных точек

в плане матрицы.

Определение выхода процесса ( $y_1, y_2, y_3$ ) и обеспечение заданного уровня факторов в каждом опыте осуществляется не точно, с какой-то ошибкой. Следовательно, с какой-то ошибкой будут определяться и коэффициенты уравнения регрессии  $b_0, b_1, b_2, \dots, b_n$ .

Для определения степени соответствия математической модели реальному процессу необходимо провести статистический анализ уравнения и проверить его адекватность экспериментальным данным. При равном числе параллельных опытов во всех точках плана матрицы дисперсию ошибки определения коэффициента регрессии  $S_{bi}^2$  определяют по формуле:

$$S_{bi}^2 = S^2(y)/(Nm(m-1)),$$

где  $S^2(y)$  – средняя для всего эксперимента дисперсия воспроизводимости среднего значения выхода;  $N$  – общее число различных точек в плане матрицы;  $m$  – число параллельных наблюдений в каждой точке.

Затем определяется значимость коэффициентов регрессии. Для этого для каждого коэффициента вычисляют значение  $t_i$  критерия Стьюдента  $t_i$  по формуле:

$$t_i = b_i / S(b_i),$$

где  $b_i$  – рассчитанные коэффициенты регрессии;  $S(b_i)$  – среднее квадратичное отклонение дисперсий коэффициента регрессии.

Проверка гипотезы значимости коэффициента  $b_i$  производится следующим образом. Задается уровень значимости  $q=5\%$  (это означает, что вероятность получения достоверного результата составляет 95%). Определяется число степеней свободы  $V=N(m-1)$  и по таблице критериев Стьюдента (приложение 2) находим критическое значение  $t_{кр}$ . Затем сравнивают значения  $t_i$  и  $t_{кр}$ . Если расчетное значение  $t_i$ , определенное по формуле, окажется больше значения  $t_{кр}$ , найденного из таблицы приложения, то коэффициент  $b_i$  признается значимым. В противном случае  $b_i$  считается статистически незначимым и отбрасывается.

После проверки значимости каждого коэффициента регрессии по приведенной методике составляется окончательно математическая модель техпроцесса, куда включаются значимые коэффициенты:

$$y = b_0 + b_1 z_1 + b_2 z_2 + \dots + b_k z_k,$$

где  $y^\wedge$  – математическое ожидание (среднее значение) исследуемого параметра техпроцесса;  $b_i$  – коэффициенты параметров модели;  $z_i$  – факторы процесса.

Если в уравнении после проверки значимости коэффициентов останутся все  $N$  коэффициентов, то проверка математической модели на адекватность экспериментальным данным теряет смысл. Если же число значимых коэффициентов хотя бы на единицу меньше числа опытов, то появляется необходимость статистической проверки адекватности уравнения.

Эта проверка осуществляется по критерию Фишера в следующей последовательности:

1) рассчитывают выход  $y^{\wedge}$  для каждого варианта опыта по уравнению, из которого исключены незначимые члены;

2) находится разность  $(y^{\wedge}-y)$ ;

3) рассчитывается дисперсия неадекватности по формуле:

$$S_{ad}^2 = \sum (y^{\wedge} - y) / (N - N^1),$$

где  $N^1$  – число значимых коэффициентов в уравнении регрессии;

4) рассчитывают  $F$  – отношение (критерий Фишера) по формуле:

$$F = S_{ad}^2 / S^2(y);$$

5) сравнивают полученное значение  $F$  – отношения с табличным значением  $F_{кр}$  для определенного числа степеней свободы и заданного уровня значимости (приложение 3).

Для проверки гипотезы неадекватности модели задается уровень значимости  $q=5\%$  и определяется число степеней свободы  $f_1$  и  $f_2$  по формулам:

$$f_1 = N - N^1; f_2 = N(m - 1).$$

Если расчетное значение критерия  $F$  окажется меньше значения  $F_{кр}$ , то гипотеза адекватности модели принимается.

## **ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ**

1. Получить у преподавателя экспериментальную таблицу ПФЭ.
2. Провести обработку результатов экспериментов. Определить значение коэффициентов регрессии и составить уравнение регрессии.
3. Произвести проверку на соответствие (адекватность) полученной теоретической зависимости экспериментальным данным.
4. Сделать выводы.

## **ОТЧЕТ О РАБОТЕ**

Отчет должен содержать:

- 1) план эксперимента;
- 2) уравнение регрессии и линейная модель процесса;
- 3) обработка результатов и проверка адекватности модели;
- 4) выводы по работе.

## **ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ**

1. Полный и дробный факторные эксперименты.
2. Полный и неполный план матрицы планирования.
3. Проверка правильности составления матрицы планов ПФЭ и ДФЭ.
4. Определение коэффициентов регрессии.
5. Определение значимости коэффициентов регрессии.
6. Проверка модели процесса на адекватность.

## ПРИМЕР

Рассчитать коэффициенты уравнения процесса по результатам реализации плана ПФЭ2, представленным в таблице.

Таблица 5

Неполный план матрицы планирования ПФЭ 2<sup>3</sup>

| № | Основные столбцы |                |                | Выход процесса |                |                |     |
|---|------------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|
|   | Z <sub>1</sub>   | Z <sub>2</sub> | Z <sub>3</sub> | Y <sub>1</sub> | Y <sub>2</sub> | Y <sub>3</sub> | Y   |
| 1 | -                | -              | -              | 73             | 69             | 68             | 70  |
| 2 | -                | +              | -              | 58             | 58             | 64             | 60  |
| 3 | +                | -              | -              | 54             | 59             | 52             | 55  |
| 4 | +                | +              | -              | 84             | 94             | 92             | 90  |
| 5 | -                | -              | +              | 100            | 106            | 109            | 105 |
| 6 | -                | +              | +              | 98             | 90             | 97             | 95  |
| 7 | +                | -              | +              | 77             | 85             | 78             | 80  |
| 8 | +                | +              | +              | 105            | 95             | 100            | 100 |

Рассчитаем коэффициенты уравнения по средним результатам у, пользуясь соответствующими формулами:

$$b_0 = \sum y / N = (70 + 60 + 55 + 90 + 105 + 95 + 80 + 100) / 8 = 81,875;$$

$$b_1 = \sum z_{1i} / N = (-70 - 60 + 55 + 90 - 105 - 95 + 80 + 100) / 8 = -0,625;$$

$$b_2 = \sum z_{2i} / N = (-70 + 60 - 55 + 90 - 105 + 95 - 80 + 100) / 8 = 4,375;$$

$$b_3 = \sum z_{3i} / N = (-70 - 60 - 55 - 90 + 105 + 95 + 80 + 100) / 8 = 13,125.$$

Следовательно, уравнение процесса будет иметь вид:

$$y = 81,875 - 0,625z_1 + 4,375z_2 + 13,125z_3.$$

Определим значимость коэффициентов уравнения, для чего рассчитываем среднюю дисперсию для всего эксперимента:

$$S^2(y) = (73-70)^2 + (69-70)^2 + (68-70)^2 + (58-60)^2 + (64-60)^2 + (58-60)^2 + (54-55)^2 + \\ + (59-55)^2 + (52-55)^2 + (84-90)^2 + (94-90)^2 + (92-90)^2 + (100-105)^2 + (106-105)^2 + \\ + (109-105)^2 + (98-95)^2 + (90-95)^2 + (97-95)^2 + (77-80)^2 + (85-80)^2 + (78-80)^2 + \\ + (105-100)^2 + (95-100)^2 + (100-100)^2;$$

$$S^2(y) = 288;$$

$$S^2(b_i) = 288 / 3 = 96;$$

$$S(b_i) = 2,449.$$

Критерий Стьюдента для каждого коэффициента  $q=5\%, N=16$

$$t_1 = 0,625 / 2,449 = 0,255 \quad t_3 = 13,125 / 2,449 = 5,36$$

$$t_2 = 4,375 / 2,449 = 1,79 \quad t_{кр} = 2,12$$

Значимыми коэффициентами оказались  $b_0=81,875$   $b_3=13,125$ , которые и включим в уравнение регрессии:

$$\hat{y} = 81,875 + 13,125Z_3.$$

### *Проверка адекватности модели*

По уравнению регрессии подсчитываем величину  $y$  для каждой точки плана матрицы:

$$\begin{aligned}y_1^{\wedge} &= y_2^{\wedge} = y_3^{\wedge} = y_4^{\wedge} = 81,875 - 13,125 = 68,75; \\ y_5^{\wedge} &= y_6^{\wedge} = y_7^{\wedge} = y_8^{\wedge} = 81,875 + 13,125 = 95.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{ad}^2 &= (68,75 - 90)^2 + (68,75 - 60)^2 + (68,75 - 55)^2 / (8 - 2) + (68,75 - 90)^2 + (95 - 105)^2 + \\ &+ (95 - 95)^2 + (95 - 80)^2 / (8 - 2) + (95 - 100)^2 / (8 - 2) = 178,12\end{aligned}$$

Рассчитываем F-отношение:

$$F = S_{ad}^2 / S^2(y) \text{ или } S^2(y) / S_{ad}^2 = 288 / 1,78 = 1,61.$$

Определяем по таблице (приложение 3)  $F_{кр}$  для  $f_1 = 6 = 8 - 2$

$$f_2 = 8(3 - 1) = 16:$$

$$F_{кр} = 2,74.$$

Гипотеза адекватности принимается.

## **ЛИТЕРАТУРА**

1. Методика выбора и оптимизации контролируемых параметров, технологических параметров. М., 1978.
2. Грачев Ю.П. Математические методы планирования экспериментов / Ю.П. Грачев. М, 1979.
3. Уартман К. В. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / К. Уартман, В. Лецкий, Э. Шефер. М., 1977.

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ВЫПОЛНЕНИИ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ИССЛЕДОВАНИЙ**

Методические указания к практической работе  
по курсу «Основы технологии машиностроения»,  
для студентов направления 15.03.05 «Конструкторско-технологическое  
обеспечение машиностроительных производств», 15.03.01 «Машиностро-  
ение» дневной и заочной форм обучения

**ЖУРНАЛ  
планирования эксперимента**

| №     | Контролируемые параметры, факторы |       |     |       | Результаты эксперимента |       |     |       |
|-------|-----------------------------------|-------|-----|-------|-------------------------|-------|-----|-------|
|       | $X_1$                             | $X_2$ | ... | $X_k$ | $Y_1$                   | $Y_2$ | ... | $Y_k$ |
| 1     |                                   |       |     |       |                         |       |     |       |
| 2     |                                   |       |     |       |                         |       |     |       |
| 3     |                                   |       |     |       |                         |       |     |       |
| 4     |                                   |       |     |       |                         |       |     |       |
| 5     |                                   |       |     |       |                         |       |     |       |
| .     |                                   |       |     |       |                         |       |     |       |
| .     |                                   |       |     |       |                         |       |     |       |
| .     |                                   |       |     |       |                         |       |     |       |
| .     |                                   |       |     |       |                         |       |     |       |
| .     |                                   |       |     |       |                         |       |     |       |
| $2^k$ |                                   |       |     |       |                         |       |     |       |
|       |                                   |       |     |       |                         |       |     |       |
|       |                                   |       |     |       |                         |       |     |       |

## Приложение 2

### ТАБЛИЦА КРИТЕРИЕВ СТЬЮДЕНТА

| Z <sub>i</sub> | при q в процентах |        |         |        |        |         |
|----------------|-------------------|--------|---------|--------|--------|---------|
|                | 20                | 10     | 5       | 2      | 1      | 0,5     |
| 1              | 3,0700            | 6,3130 | 12,7060 | 31,820 | 63,656 | 127,656 |
| 2              | 1,8850            | 2,9200 | 4,3020  | 6,964  | 9,924  | 14,089  |
| 3              | 6377              | 35340  | 3,182   | 4,540  | 5,840  | 7,458   |
| 4              | 5332              | 13180  | 2,776   | 3,746  | 4,604  | 5,597   |
| 5              | 4759              | 01500  | 2,570   | 3,649  | 0321   | 4,773   |
| 6              | 1,4390            | 1,943  | 2,4460  | 3,1420 | 3,7070 | 4,316   |
| 7              | 4149              | 8946   | 3646    | 2,998  | 4995   | 2293    |
| 8              | 3968              | 8596   | 3060    | 8965   | 3554   | 3,832   |
| 9              | 3830              | 8331   | 2622    | 8214   | 2498   | 6897    |
| 10             | 3720              | 8125   | 2281    | 7638   | 1693   | 5814    |
| 11             | 1,363             | 1,795  | 2,201   | 2,718  | 3,105  | 3,496   |
| 12             | 3562              | 7823   | 1788    | 6810   | 0845   | 4284    |
| 13             | 3502              | 7709   | 1604    | 6503   | 1123   | 3725    |
| 14             | 3450              | 7613   | 1448    | 6245   | 2,976  | 3257    |
| 15             | 3406              | 7530   | 1314    | 6025   | 9467   | 2860    |
| 16             | 1,3360            | 1,7450 | 2,1190  | 2,5830 | 2,9200 | 3,2520  |
| 17             | 3334              | 7396   | 1098    | 5668   | 8982   | 2224    |
| 18             | 3304              | 7341   | 1009    | 5514   | 8784   | 1966    |
| 19             | 3277              | 7291   | 0930    | 5395   | 8609   | 1737    |
| 20             | 3253              | 7247   | 08600   | 5280   | 8453   | 1534    |
| 21             | 1,3230            | 1,7200 | 2,0790  | 2,5170 | 2,8310 | 3,1350  |
| 22             | 3212              | 7117   | 0739    | 5083   | 8188   | 1188    |
| 23             | 3195              | 7139   | 0687    | 4999   | 8073   | 1040    |
| 24             | 3178              | 7109   | 0639    | 4922   | 7969   | 0905    |
| 25             | 3163              | 7081   | 0595    | 4851   | 7874   | 0782    |
| 26             | 1,315             | 1,705  | 2,059   | 2,478  | 2,778  | 3,0660  |
| 27             | 3137              | 7033   | 0518    | 4727   | 7707   | 0565    |
| 28             | 3125              | 7011   | 0484    | 4671   | 7633   | 0469    |
| 29             | 3114              | 6991   | 0452    | 4620   | 7564   | 0360    |
| 30             | 3104              | 6973   | 0423    | 4573   | 7500   | 0298    |
| 32             | 1,3080            | 1,6930 | 2,0360  | 2,4480 | 2,7380 | 3,0140  |
| 34             | 3070              | 6909   | 0322    | 4411   | 7284   | 9520    |
| 36             | 3050              | 6883   | 0281    | 4345   | 7195   | 9,490   |
| 38             | 3042              | 6860   | 0244    | 4286   | 7116   | 9808    |
| 40             | 3031              | 6839   | 0211    | 4233   | 7045   | 9712    |
| 42             | 1,320             | 1,682  | 2,018   | 2,418  | 2,6980 | 2,6930  |
| 44             | 3011              | 6802   | 0154    | 4141   | 6923   | 9555    |
| 46             | 3002              | 6767   | 0129    | 4102   | 6870   | 9488    |
| 48             | 2994              | 6772   | 0106    | 4056   | 6822   | 9426    |
| 50             | 2987              | 6759   | 0086    | 4033   | 6778   | 9370    |

# Приложение 3

## ТАБЛИЦЫ КРИТЕРИЯ ФИШЕРА q=5%

|    | f <sub>1</sub> |       |       |       |       |       |       |
|----|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
|    | 1              | 2     | 3     | 4     | 5     | 6     | 7     |
| 1  | 161            | 200   | 216   | 225   | 230   | 234   | 237   |
| 2  | 18,51          | 19,00 | 19,16 | 19,25 | 19,30 | 19,33 | 19,36 |
| 3  | 10,13          | 9,55  | 9,28  | 9,12  | 9,01  | 8,94  | 8,88  |
| 4  | 7,71           | 6,94  | 6,59  | 6,39  | 6,26  | 6,16  | 6,09  |
| 5  | 6,61           | 5,79  | 5,41  | 5,19  | 5,05  | 4,95  | 4,88  |
| 6  | 5,99           | 5,14  | 4,76  | 4,53  | 4,39  | 4,28  | 4,21  |
| 7  | 5,59           | 4,74  | 4,35  | 4,12  | 3,97  | 3,87  | 3,99  |
| 8  | 5,32           | 4,46  | 4,07  | 3,84  | 3,69  | 3,58  | 3,50  |
| 9  | 5,12           | 4,26  | 3,86  | 3,63  | 3,48  | 3,37  | 3,29  |
| 10 | 4,96           | 4,10  | 3,71  | 3,48  | 3,33  | 3,22  | 3,14  |
| 11 | 4,84           | 3,98  | 3,59  | 3,36  | 3,20  | 3,09  | 3,01  |
| 12 | 4,75           | 3,88  | 3,49  | 3,29  | 3,11  | 3,00  | 2,92  |
| 13 | 4,67           | 3,80  | 3,41  | 3,18  | 3,02  | 2,92  | 2,84  |
| 14 | 4,60           | 3,74  | 3,34  | 3,11  | 2,96  | 2,85  | 2,77  |